Experiência 5 - Oscilações harmônicas forçadas

1. OBJETIVO

O objetivo desta aula é discutir e realizar experimentos envolvendo um conjunto massa-mola sob ação de uma força externa oscilatória no tempo. Usaremos um sonar para medirmos a posição do conjunto massa-mola em função do tempo. Na análise dos experimentos desprezaremos o atrito com o ar.

2. INTRODUÇÃO

Como vimos na aula sobre o oscilador harmônico simples (**Aula 3**), podemos modelar uma mola real de massa m_k, à qual prendemos em uma de suas extremidades um suporte de massa m_s, contendo uma massa calibrada m_{cal}, por uma mola ideal (sem massa) à qual é pendurada uma massa M=m_{ef} + m_s + m_{cal}, onde m_{ef} é a massa efetiva da mola, m_{ef} < m_k. A equação diferencial que descreve o movimento da massa presa à extremidade da mola é dada por:

$$\frac{d^2\eta_0}{dt^2} = -\omega_0{}^2\eta, \tag{1}$$

onde :

$$\eta_0 = y(t) - y_e(M). \tag{2}$$

η_0 é uma coordenada de posição que vale zero na posição de equilíbrio para uma determinada massa M no suporte. Ainda temos que:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \ . \tag{3}$$

Vimos que a solução da equação diferencial descrita na Eq.(1) é uma combinação linear de funções *seno* e *cosseno* com período de oscilação dado por:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}. \tag{4}$$

Ou, em termos das massas m_{ef}, m_s, m_{cal}:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_{ef} + m_s + m_{cal}}{k}}. \tag{5}$$

Suponhamos agora, que haja uma força externa $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ atuando no sistema, como mostrado na FIG.1, que representa o aparato experimental que usaremos nesta aula.

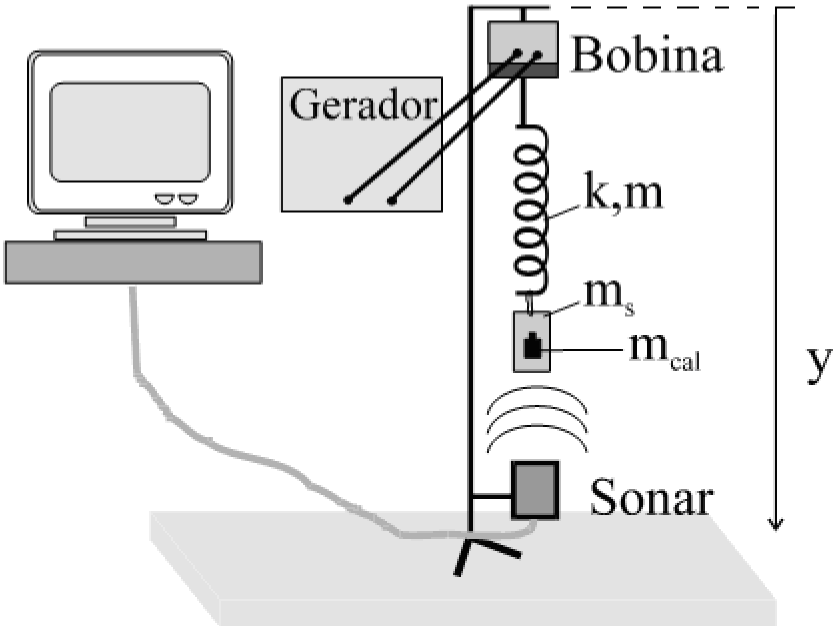

FIG. 1 - Esquema do aparato experimental a ser usado na aula.

Nesta situação a equação diferencial que descreve o movimento da massa *M* passa a ser:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \omega_0{}^2\eta = \frac{F_0}{M}\cos(\omega t)\,, \tag{6}$$

lembrando que estamos desconsiderando o efeito de amortecimento devido ao atrito do corpo de massa *M* com o ar. Usando o princípio de superposição para equações diferenciais lineares [1], a solução da Eq.(6) será a soma entre as soluções da equação homogênea, Eq.(1), com uma solução particular da equação inomogênea, Eq.(6). A solução da equação homogênea, nós já vimos, é a solução do oscilador harmônico simples, correspondendo às oscilações livres do sistema. Embora estejamos desprezando efeitos dissipativos (como o atrito com o ar), eles estão sempre presentes e causam o amortecimento das oscilações livres, tornando-as desprezíveis para tempos muito maiores que o chamado tempo de decaimento. Por essa razão dizemos que a solução da equação homogênea, Eq.(1), define o regime transiente de oscilações. Chamamos de η_0 a função que descreve a solução nesse regime e vimos (**Aula 3**) que ela pode ser escrita como:

$$\eta_0(t) = A_0\cos(\omega_0 t + \phi). \tag{7}$$

A solução particular da equação inomogênea corresponde às oscilações forçadas do sistema. Como a força externa fornece continuamente energia para o sistema, essas oscilações persistem mesmo na presença de dissipação. Por esses motivo essa solução define o regime estacionário das oscilações, isto é, descreve o comportamento do sistema após ter passado um tempo suficientemente grande (bem maior do que os períodos de todas as oscilações envolvidas no problema) após o início da ação da força externa oscilatória. Pelo fato de estarmos numa situação onde o efeito do atrito é pequeno, a solução que observaremos será uma combinação das soluções transiente e estacionária.

Vamos procurar uma solução particular da Eq.(6) na seguinte forma:

$$\eta_p(t) = A_p\cos(\omega t). \tag{8}$$

Substituindo a Eq.(8) na Eq.(6) obtemos:

Resultando em:

$$\left(\omega_0^{\,2}-\omega^2\right)A_P\cos(\omega t)=\frac{F_0}{M}\cos(\omega t). \tag{9}$$

$$A_p=\frac{F_0}{M\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}. \tag{10}$$

A solução particular da Eq.(6) pode então ser escrita como:

$$\eta_p(t)=\frac{F_0}{M\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\cos(\omega t). \tag{11}$$

Lembrando que $F(t)=F_0\cos(\omega t)$, a equação acima nos mostra que quando $\omega<\omega_0$ a solução forçada $\eta_p(t)$ apresentará máximos e mínimos no mesmo instante que a força $F(t)$. Dizemos, então, que o sistema oscila em fase com a força externa. Quando $\omega>\omega_0$ a grandeza A_p se torna negativa e $\eta_p(t)$ será máxima quando a força for mínima, e vice-versa. Dizemos, então, que o sistema oscila em oposição de fase com a força. Note que, à medida que a freqüência ω da força externa se aproxima da freqüência ω_0 das oscilações livres, a amplitude A_p das oscilações forçadas cresce, tornando-se infinitamente grande quando $\omega=\omega_0$. Esse fenômeno é chamado de ressonância.

Como a solução geral da Eq.(6) é a soma da solução geral da Eq.(1) e da solução particular Eq.(11), ela será dada por:

$$\eta(t)=\frac{F_0}{M\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\cos(\omega t)+A_0\cos(\omega_0 t+\phi_0). \tag{12}$$

Se assumirmos que as condições iniciais sejam dadas por $\eta(0)=0$ e $\dot{\eta}(0)=0$, chegaremos finalmente a:

$$\eta(t)=-\frac{F_0}{M\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\left[\cos(\omega_0 t)-\cos(\omega t)\right]. \tag{13}$$

Na ressonância, quando $\omega=\omega_0$, a Eq.(13) pode ser escrita como:

$$\eta(t)=\frac{F_0}{2M\omega_0}t\,\mathrm{sen}(\omega_0 t), \tag{14}$$

mostrando que, quando a freqüência da força externa é igual à freqüência de oscilação natural do oscilador harmônico simples, a amplitude das oscilações cresce linearmente com o tempo. (Como , na prática é muito difícil sintonizar exatamente a ressonância, a amplitude das oscilações não crescerá indefinidamente).

Para freqüências da força externa próximas da freqüência de ressonância, $\omega\sim\omega_0$, vemos ainda o surgimento de outro efeito físico interessante, o batimento. Usando a identidade trigonométrica:

$$\cos(\omega_0 t)-\cos(\omega t)=-2sen\left[\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}\right)t\right]sen\left[\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}\right)t\right], \tag{15}$$

podemos reescrever a Eq.(13) como:

$$\eta(t)=\frac{2F_0}{M\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}sen\left[2\pi\left(\frac{f_0-f}{2}\right)t\right]sen\left[2\pi\left(\frac{f_0+f}{2}\right)t\right], \tag{16}$$

onde fizemos uso das relações $\omega_0 = 2\pi f_0$ e $\omega = 2\pi f$, com f_0 sendo a freqüência natural de oscilação do sistema e f a freqüência da força externa aplicada. Quando $f \sim f_0$, o termo $\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{f_0+f}{2}\right)t\right]$ oscila rapidamente comparado com

$$A(t) = \frac{2F_0}{M\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{f_0 - f}{2}\right)t\right]. \qquad (17)$$

Nesse caso, podemos considerar $\eta(t)$ como representando um movimento oscilatório de freqüência $\frac{f_0+f}{2}$ cuja amplitude $|A(t)|$ varia lentamente no tempo com freqüência $\frac{f_0-f}{2}$.

Na FIG.2, a linha cheia representa a variação da posição *η(t)* em função do tempo *t*, para o caso em que $f_0=2$ *Hz e* $f=2{,}3$ *Hz*, enquanto as linhas tracejadas representam a *envoltória* das oscilações rápidas, dada por $\pm|A(t)|$. O fenômeno dos *batimentos* aparece devido à modulação da amplitude de $\eta(t)$ com uma freqüência $f_b = |f_0 - f|$. (Note que o intervalo de tempo entre dois zeros de *η(t)* corresponde ao valor de $1/\Delta f$). Por esse motivo, chamamos $f_b = |f_0 - f|$ de freqüência de batimento do sistema. Na ressonância f_b tende a zero.

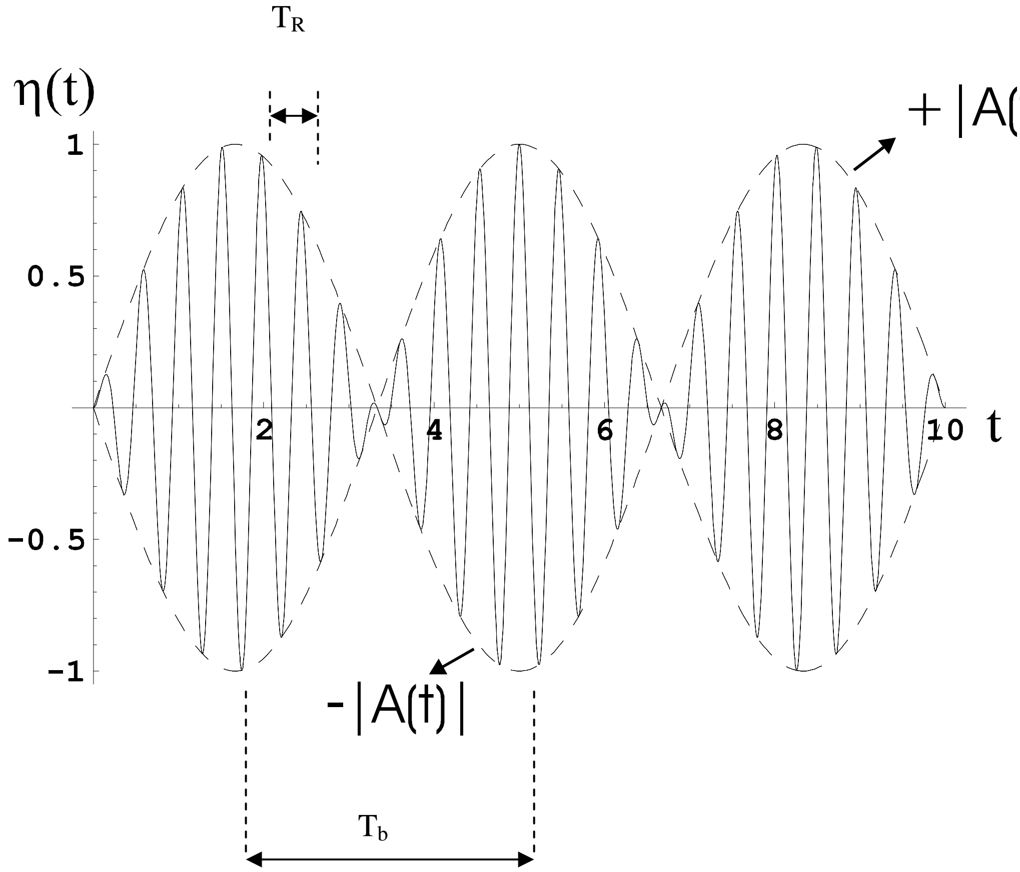

FIG.2 – A linha cheia representa o comportamento de *η(t)*, mostrando claramente o fenômeno do batimento. As linhas tracejadas representam a envoltória das oscilações rápidas de *η(t)* . O tempo está representado em segundos e as amplitudes em unidades arbitrárias. Estamos denominando o período das oscilações rápidas por T_R , e o período do batimento por T_b .

3. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

1 - Meça a massa m_k da mola que será usada e meça também a massa m_s do suporte-recipiente onde serão colocadas as massas calibradas. **ATENÇÂO:** É preciso ter o máximo de cuidado com a fixação da bobina.

2 - Pendure a mola no suporte da bobina na mesma haste em que está instalado o sonar e pendure o recipiente com uma massa m_{cal} de 10g ou 15g. Alinhe o sistema mola-recipiente com o sonar. Se tiver dúvida no uso do sonar, use as dicas dadas no **Apêndice B** da apostila.

3 - Coloque o sistema massa-mola para oscilar. A amplitude das oscilações não precisa ser muito grande, basta que as oscilações possam ser monitoradas pelo sonar. Use o sonar para medir o período da oscilação natural do sistema, T_0. A incerteza na medida do período fica menor se, ao invés de medirmos uma única oscilação, medimos o tempo correspondente a várias oscilações e dividimos o valor obtido pelo número de oscilações. Meça o intervalo de 5 períodos de oscilação.

4 - Deixe o oscilador em repouso e ligue o gerador de sinais que está preso à mola. Com uma amplitude pequena de oscilação da haste da bobina, varie a freqüência da força externa em torno de 2 Hz, e procure a ressonância. Perto da ressonância você observará o fenômeno do batimento. Meça o período das oscilações rápidas, T_R, e o período de batimento, T_b.

5. REFERÊNCIAS

[1] H. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica, volume 2.