

## Circuitos RLC com corrente alternada: ressonância e filtros passa-banda e rejeita-banda

### 8.1 Material

- Gerador de funções;
- osciloscópio;
- multímetros digitais (de mão e de bancada);
- resistor de  $1\text{ k}\Omega$ ;
- capacitor de  $10\text{ nF}$ ;
- indutor de  $23,2\text{ mH}$ .

### 8.2 Introdução

A ressonância é um fenômeno característico de sistemas oscilatórios sujeitos à uma perturbação periódica. Quando a frequência desta perturbação se aproxima de uma das frequências preferenciais de oscilação do sistema, observa-se um significativo aumento da amplitude de oscilação. As frequências para as quais observa-se este aumento na resposta do sistema são chamadas de frequências de ressonância. Se uma perturbação excita o sistema numa destas frequências, mesmo forças de baixa intensidade são capazes de produzir oscilações de grande amplitude.

A ressonância se manifesta em diversos sistemas físicos, sejam eles mecânicos, acústicos ou eletromagnéticos. Neste experimento (dividido em 2 aulas) veremos como a ressonância se apresenta num sistema elétrico em particular, o circuito RLC alimentado com tensão senoidal. Faremos medidas para caracterizar o comportamento ressonante do circuito e mediremos (de diferentes maneiras) sua frequência de ressonância, comparando com as

previsões teóricas. Na primeira aula nos concentraremos no comportamento da amplitude dos sinais, e discutiremos como calcular a potência elétrica transmitida em circuitos; veremos também que, dependendo de como o circuito for montado, ele poderá se comportar como um filtro passa-banda ou rejeita-banda. Já na segunda aula o foco será a identificação do comportamento ressonante pela observação das diferenças de fase.

### 8.3 Circuitos RLC em série

A figura 8.1 mostra o esquema de um circuito RLC em série, ao qual conectamos um osciloscópio para medir a tensão do gerador (no canal 1) e a tensão sobre o resistor (no canal 2). Aplicando a lei das malhas ao circuito, obtemos

$$V_G(t) = V_L(t) + V_C(t) + V_R(t), \quad (8.1)$$

com  $V_L(t)$ ,  $V_C(t)$  e  $V_R(t)$  dados por:

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad (8.2)$$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}, \quad (8.3)$$

e

$$V_R(t) = R i(t). \quad (8.4)$$

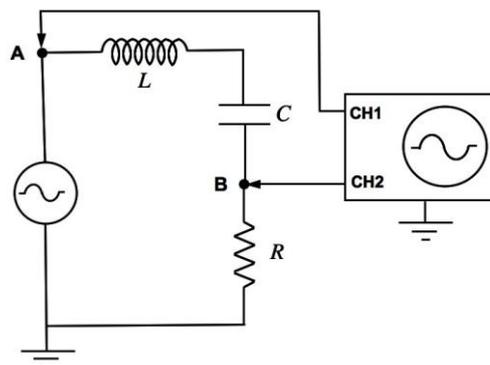


Figura 8.1: Representação esquemática de um circuito RLC em série.

Com a voltagem de excitação dada por

$$V_G(t) = V_0 \operatorname{sen}(\omega t), \quad (8.5)$$

esperamos que a corrente no circuito seja também uma função senoidal que oscila na frequência angular  $\omega$ , tendo como forma geral

$$i(t) = i_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi). \quad (8.6)$$

Precisamos encontrar  $i_0$  e  $\varphi$  a partir da equação do circuito, dada pela equação 8.1. Podemos proceder de duas maneiras:

- substituir a expressão para  $i(t)$  nas equações 8.2, 8.3 e 8.4, e então na equação 8.1, e resolver a equação diferencial resultante;
- usar o formalismo de números complexos, determinando a impedância do circuito.

Deixamos como exercício a determinação de  $i_0$  e  $\varphi$  a partir da primeira opção, e seguiremos a segunda opção. De acordo com a fórmula de Euler,  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta$  (lembre que usamos  $j$  para representar o complexo  $\sqrt{-1}$ ), e a tensão do gerador pode ser escrita como

$$V_G(t) = \operatorname{Im} \left[ \tilde{V}_G(t) \right], \quad (8.7)$$

isto é, ela é a parte imaginária de uma tensão complexa dada por

$$\tilde{V}_G(t) = V_0 e^{j\omega t}. \quad (8.8)$$

A corrente  $i(t)$  também pode ser escrita como a parte imaginária de uma grandeza complexa:

$$i(t) = \operatorname{Im} \left[ \tilde{i}(t) \right], \quad (8.9)$$

com

$$\tilde{i}(t) = i_0 e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (8.10)$$

Seguindo esta notação, a expressão análoga à lei de Ohm será

$$\tilde{V}_G(t) = \tilde{Z} \tilde{i}(t), \quad (8.11)$$

onde  $\tilde{Z}$  é a impedância total do circuito.

No circuito mostrado na figura 8.1 os três elementos estão associados em série. A associação de impedâncias complexas do circuito é feita da mesma forma que a associação de resistências. Assim, lembrando que para o resistor temos  $\tilde{Z}_R = R$ , para o capacitor  $\tilde{Z}_C = -jX_C$  e para o indutor  $\tilde{Z}_L = jX_L$ , temos:

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_R + \tilde{Z}_C + \tilde{Z}_L = R + j(X_L - X_C) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (8.12)$$

Como a impedância total  $\tilde{Z}$  é um número complexo, podemos escrevê-la na forma polar,  $\tilde{Z} = Z e^{j\theta}$ , onde

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad (8.13)$$

e

$$\tan \theta = \frac{(X_L - X_C)}{R} = \frac{(\omega L - 1/\omega C)}{R}. \quad (8.14)$$

Substituindo as equações 8.8 e 8.13 na equação 8.11, encontramos:

$$\tilde{i}(t) = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{Z e^{j\theta}} = \frac{V_0}{Z} e^{j(\omega t - \theta)} = \frac{V_0 e^{j(\omega t - \theta)}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (8.15)$$

Como a corrente  $i(t)$  é a parte imaginária de  $\tilde{i}(t)$  (equação 8.9), temos que:

$$i_0 = \frac{V_0}{Z}, \quad (8.16)$$

e

$$\varphi = -\theta. \quad (8.17)$$

Ou seja,

$$i_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}, \quad (8.18)$$

e

$$\tan \varphi = -\frac{(X_L - X_C)}{R} = \frac{(X_C - X_L)}{R}. \quad (8.19)$$

A equação 8.19 nos dá a diferença de fase entre a voltagem do gerador e a corrente no circuito.

O fato novo introduzido pelo circuito RLC é que a impedância terá um comportamento diferente dependendo da frequência:

- para baixas frequências ( $\omega < 1/\sqrt{LC}$ ), teremos  $X_C > X_L$ , o circuito terá característica predominantemente capacitiva;
- para altas frequências ( $\omega > 1/\sqrt{LC}$ ), teremos  $X_C < X_L$ , e o circuito terá características indutivas;
- na frequência em que as reatâncias são iguais ( $X_C = X_L$ ), elas se cancelam mutuamente, fazendo com que o circuito apresente propriedades puramente resistivas; esta frequência é chamada de **frequência angular de ressonância** e é dada por:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (8.20)$$

A frequência linear de ressonância, ou simplesmente frequência de ressonância, é então escrita como:

$$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (8.21)$$

Sabemos que a amplitude da voltagem no resistor está em fase com a corrente. Isto significa que medir  $V_R(t)$  é observar o comportamento da corrente no circuito. Assim, para este circuito temos:

$$V_{0R} = \frac{R\omega C}{\sqrt{(R\omega C)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_R^2}\right)^2}} V_0, \quad (8.22)$$

e

$$\tan \varphi = \frac{1}{R\omega C} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_R^2} \right). \quad (8.23)$$

Quando a frequência angular  $\omega$  é muito maior ou muito menor do que  $\omega_R$ , a amplitude  $V_{0R}$  também tende a zero. Conforme  $\omega$  se aproxima de  $\omega_R$ ,  $V_{0R}$  se aproxima de  $V_0$ . Já para a diferença de fase  $\varphi$ , quando a frequência angular tende a zero, a diferença de fase tende a  $+\pi/2$ , ou seja, o circuito tem comportamento capacitivo. Quando a frequência angular tende a infinito, a diferença de fase tende a  $-\pi/2$ , ou seja, o circuito tem comportamento indutivo. Finalmente, quando  $\omega = \omega_R$ ,  $\varphi = 0$ , neste caso o circuito assume um caráter puramente resistivo.

Na figura 8.2 mostramos o comportamento esperado para a amplitude de  $V_R$  em função da frequência angular do sinal do gerador. Na figura 8.3 é mostrado o comportamento esperado para a diferença de fase em função da frequência angular.

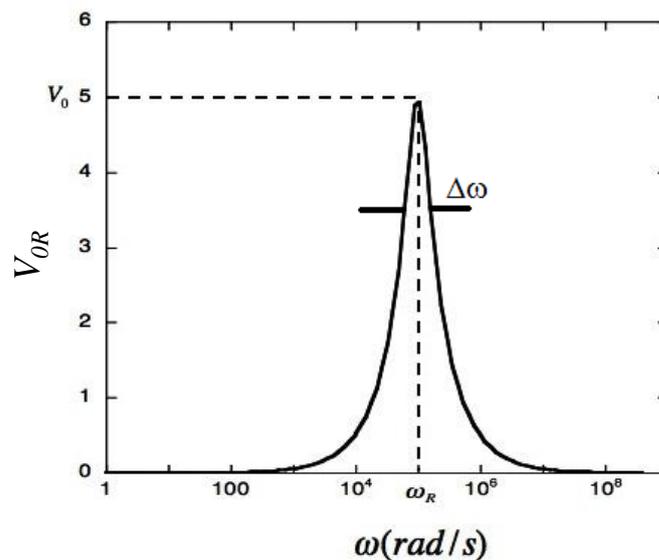


Figura 8.2: Comportamento esperado para a amplitude de  $V_R$  em função da frequência angular do sinal do gerador, para um circuito RLC com  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 10 \text{ nF}$  e a voltagem de pico do gerador  $V_0 = 5 \text{ V}$ . Para este caso temos  $\omega_R = 100 \text{ krad/s}$  e  $f_R = 15,9 \text{ kHz}$ .

### 8.3.1 Potência média

A potência elétrica transmitida num circuito (isto é, a energia transmitida por unidade de tempo) é dada por  $P = V i$ . No caso de tensões e correntes constantes, este é o número que nos interessa. Mas no caso de circuitos alimentados por tensões alternadas, teremos  $P(t) = V(t) i(t)$  e a potência será um função que oscila (rapidamente, na maioria das vezes) em

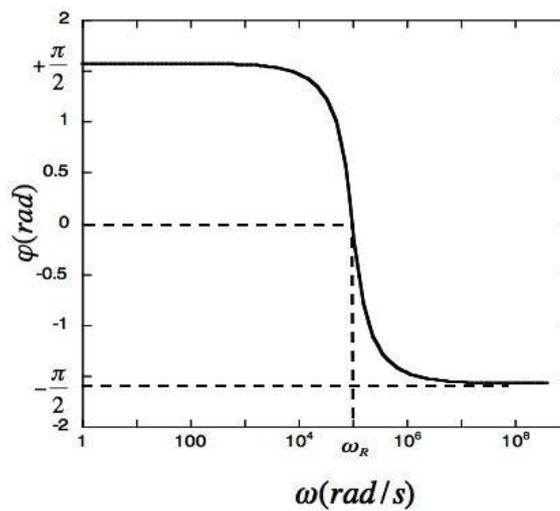


Figura 8.3: Comportamento esperado para a diferença de fase  $\phi$  em função da frequência angular do sinal do gerador, para o mesmo circuito da figura 8.2.

função do tempo. Ao calcular  $P(t_0)$  para um dado instante de tempo teremos a potência instantânea, que não traz informação sobre o comportamento periódico do sistema. É muito mais instrutivo calcular a potência média transmitida num ciclo de oscilação  $\langle P \rangle$ . Para tensões e correntes senoidais que oscilam com frequência angular  $\omega$ , a potência média transmitida do gerador para o circuito é função de  $\omega$  e pode ser escrita como

$$\langle P \rangle(\omega) = V_{\text{ef}} i_{\text{ef}} \cos \varphi, \quad (8.24)$$

onde  $V_{\text{ef}}$  e  $i_{\text{ef}}$  são, respectivamente, a tensão eficaz do gerador e a corrente eficaz no circuito, enquanto  $\varphi$  é diferença de fase entre a corrente e a tensão no gerador. Num circuito RLC, esta potência transmitida pelo gerador deve ser igual à potência dissipada no resistor (através do efeito Joule), já que não há dissipação no capacitor e no indutor (se desprezarmos a resistência interna deste último). A potência dissipada pode ser escrita como

$$\langle P_R \rangle(\omega) = R i_{\text{ef}}^2 = R \left( \frac{V_{\text{efR}}}{R} \right)^2 = \frac{(V_{\text{0R}})^2}{2R}, \quad (8.25)$$

onde utilizamos a expressão para a tensão eficaz no resistor

$$V_{\text{efR}} = \frac{V_{\text{0R}}}{\sqrt{2}}. \quad (8.26)$$

A expressão para  $\langle P_R \rangle(\omega)$  pode ser escrita em função da resistência  $R$  e das reatâncias

capacitiva  $X_C$  e indutiva  $X_L$ :

$$\langle P_R \rangle(\omega) = R i_{\text{ef}}^2 = \frac{R V_{\text{ef}}^2}{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \frac{1}{2} \frac{R V_0^2}{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}. \quad (8.27)$$

É fácil verificar que o gráfico de  $\langle P_R \rangle(\omega)$ , mostrado na figura 8.4, apresenta um máximo em  $\omega = \omega_R$ , ao reescrever esta última expressão em termos da frequência de ressonância:

$$\langle P_R \rangle(\omega) = \frac{1}{2} \frac{R V_0^2 \omega^2}{\omega^2 R^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_R^2)^2}. \quad (8.28)$$

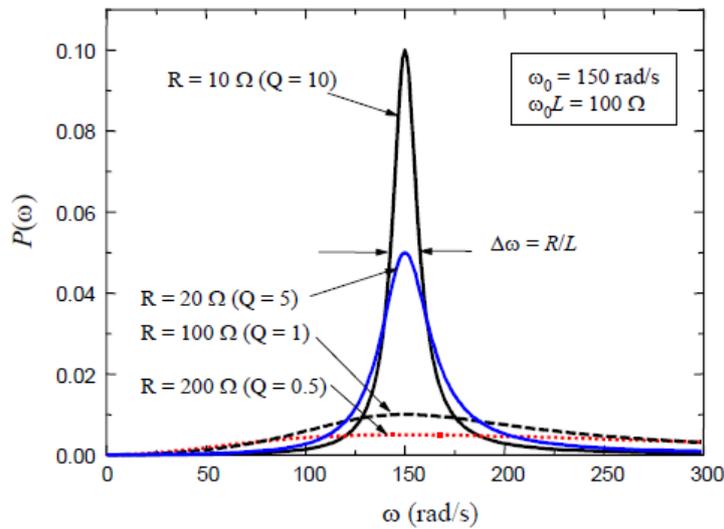


Figura 8.4: Potência média transferida por um gerador de  $V_{\text{ef}} = 1$  V para um circuito RLC com diferentes valores de  $R$ .

Na ressonância o circuito apresenta as seguintes características:

- um comportamento puramente resistivo;
- sua impedância é mínima, ou seja

$$Z(\omega_R) = R; \quad (8.29)$$

- a reatância total  $X = X_C - X_L$  é nula, isto é

$$X(\omega_R) = 0; \quad (8.30)$$

- a corrente que passa no circuito é, portanto, máxima, ou seja,

$$i_0(\omega_R) = \frac{V_{0R}}{R}; \quad (8.31)$$

- a potência transferida ao circuito é máxima e dada por

$$\langle P_R \rangle_{\max} = \frac{V_0^2}{2R}. \quad (8.32)$$

A largura de banda da ressonância é definida como o intervalo de frequências dentro do qual a potência  $\langle P_R \rangle(\omega)$  é maior ou igual à metade do valor máximo, ou seja,  $\Delta\omega$  corresponde à amplitude à meia-altura da curva  $\langle P_R \rangle$  vs.  $\omega$ . Isso significa que pode ser escrita como

$$\Delta\omega_{\text{série}} = \frac{R}{L}. \quad (8.33)$$

O fator de mérito  $Q$  do circuito em série ressonante caracteriza a curva de ressonância e é dado por:

$$Q_{\text{série}} = \frac{\omega_R}{\Delta\omega_R} = \omega_R \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (8.34)$$

A figura 8.5 mostra dois filtros ressonantes em série com as suas respectivas curvas de transmitância.

Quando a saída é no resistor (figura 8.5a) temos um filtro passa-banda. Longe da ressonância a transmitância cai a uma taxa de 20 dB por década. Quando a saída é no capacitor temos um filtro passa-baixas. Este filtro rejeita as altas frequências melhor que o filtro RC passa-baixa. Para uma melhor comparação entre os filtros passa-baixas RLC e o RC, na linha tracejada da curva inferior da figura 8.5 representamos também a transmitância de um filtro RC com a mesma frequência de corte. No filtro RLC a transmitância cai com o logaritmo da frequência a uma taxa de  $-40$  dB/dec, enquanto que no RC a queda é de  $-20$  dB/dec.

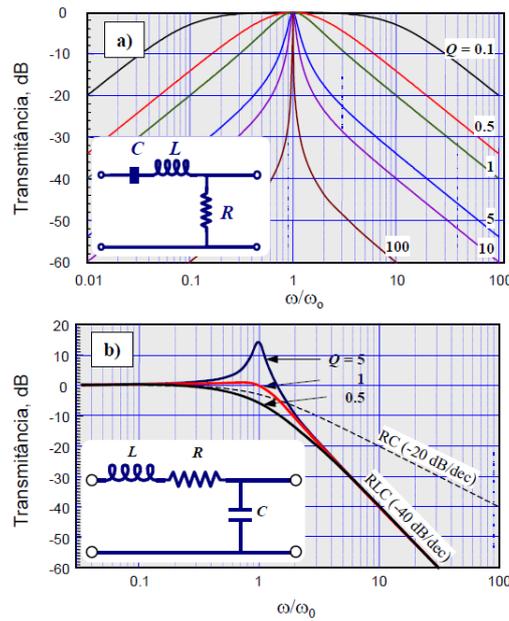


Figura 8.5: Curvas de transmitância para circuitos RLC: (a) transmitância quando a saída é tomada no resistor; (b) transmitância quando a saída é tomada no capacitor.

## 8.4 Circuitos RLC em paralelo

Um circuito RLC em paralelo está representado na figura 8.6. Para este circuito a impedância complexa da associação LC em paralelo é:

$$\tilde{Z}_{LC} = j\left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right), \quad (8.35)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular do gerador. A impedância complexa total do circuito ressonante RLC paralelo é

$$\tilde{Z} = R + \frac{L/C}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = R + j\left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right), \quad (8.36)$$

e podemos deduzir que a corrente complexa é dada por:

$$\tilde{i}(t) = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{Z e^{j\theta}} = \frac{V_0}{Z} e^{j(\omega t - \theta)} = \frac{V_0 e^{j(\omega t - \theta)}}{\sqrt{R^2 + \left[\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right]^2}}, \quad (8.37)$$

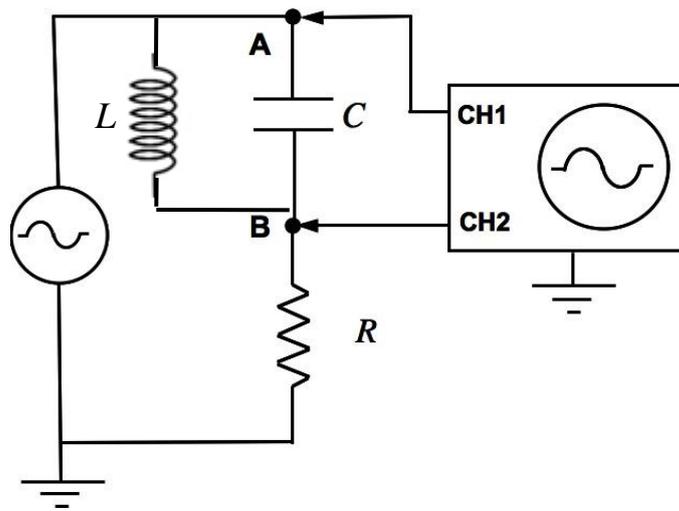


Figura 8.6: Representação esquemática do circuito RLC paralelo.

onde  $V_0$  é a amplitude de voltagem no gerador e a fase da impedância  $Z$  é dada por:

$$\tan \theta = \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)}. \quad (8.38)$$

Para este circuito a potência média  $\langle P \rangle(\omega)$  dissipada no resistor será:

$$\langle P_R \rangle(\omega) = V_{ef} i_{ef} \cos \varphi = R i_{ef}^2 = \frac{1}{2} \frac{R V_0^2}{R^2 + \left[ \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right]^2}. \quad (8.39)$$

A condição de ressonância é a mesma do circuito RLC em série, ou seja:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (8.40)$$

Na condição de ressonância no circuito RLC em paralelo verificamos que:

- sua impedância é máxima,  $Z(\omega_R) \rightarrow \infty$ ;
- a reatância total  $X$  é infinita,  $X(\omega_R) \rightarrow \infty$ ;
- a corrente que passa no circuito é mínima,  $i(\omega_R) = 0$ ;

- a potência transferida ao circuito é mínima,

$$\langle P_R \rangle_{\min} = 0; \quad (8.41)$$

Para  $\omega = 0$  ou  $\omega \rightarrow \infty$  a potência dissipada no resistor é máxima e igual a

$$\langle P_R \rangle_{\max} = \frac{V_0^2}{2R}. \quad (8.42)$$

Se  $\omega \rightarrow 0$  toda a corrente passa pelo indutor, e se  $\omega \rightarrow \infty$  toda a corrente passa pelo capacitor.

A largura de banda da ressonância é definida como o intervalo de frequências dentro do qual a potência média  $\langle P \rangle(\omega)$  é menor ou igual à metade do valor máximo. Esta largura pode ser escrita como:

$$\Delta\omega_{\text{paralelo}} = \frac{1}{RC}. \quad (8.43)$$

O fator de mérito  $Q$  do circuito em paralelo ressonante caracteriza a curva de ressonância, e é dado por:

$$Q_{\text{paralelo}} = \omega_R RC = \frac{\omega_R}{\Delta\omega_{\text{paralelo}}}. \quad (8.44)$$

É interessante notar que o fator de mérito do circuito em paralelo é o inverso do fator de mérito para o circuito em série:

$$Q_{\text{paralelo}} = \frac{1}{Q_{\text{série}}}. \quad (8.45)$$

A figura 8.7 mostra o gráfico da potência média normalizada em função de  $\omega$ , para diferentes valores de  $Q$ . A partir desse gráfico fica claro que o circuito RLC em paralelo (com voltagem de saída no resistor) corresponde a um filtro rejeita-banda: a potência de saída tem um valor constante para todos os valores de frequência, exceto para valores próximos de  $\omega_R$ , faixa na qual a potência transmitida decai rapidamente, indo a zero quando  $\omega = \omega_R$ .

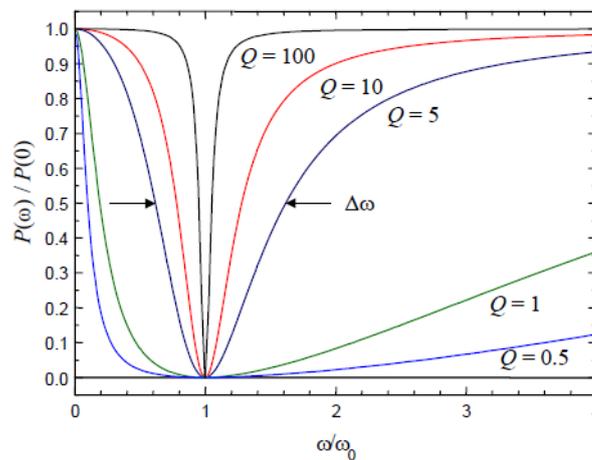


Figura 8.7: Potência normalizada para diferentes valores de  $Q$  em um circuito RLC em paralelo.

## 8.5 Procedimentos experimentais

### 8.5.1 Procedimento I: análise da amplitude de corrente no circuito RLC em série

Vimos que a ressonância ocorre quando as reatâncias capacitiva e indutiva se anulam mutuamente ( $X_C = X_L$ ). Nesta situação, para o circuito em série, a impedância do circuito é mínima e a amplitude de corrente atinge seu valor máximo. Dessa forma, variamos a frequência do gerador e observamos no osciloscópio para qual valor da mesma a amplitude  $V_{OR}$  é máxima ( $V_{OR} = V_0$ ). Esse valor de  $f$  será a frequência de ressonância do circuito. Para o circuito em paralelo ocorrerá o oposto, na frequência de ressonância a amplitude de corrente será mínima e, conseqüentemente, a amplitude de voltagem no resistor também será mínima.

1. Com o auxílio do osciloscópio, ajuste a tensão de saída do gerador para uma onda senoidal com amplitude  $V_0 = 4$  V e frequência  $f = 1$  kHz.
2. Monte o circuito da figura 1 com  $R = 560 \Omega$ ,  $C = 10$  nF e  $L = 23,2$  mH. Meça e anote os valores de  $R$  e  $C$  utilizados, com suas respectivas incertezas. Para o indutor, anote o valor nominal de sua indutância e considere uma incerteza relativa de 10 %.
3. Calcule o valor nominal da frequência de ressonância a partir dos valores anotados para  $L$  e  $C$ .
4. Complete a tabela 1 com os valores das amplitudes de voltagem no resistor ( $V_{OR}$ ) obtidas para cada frequência utilizada. Escolha cerca de 10 valores de frequência, metade deles abaixo da frequência de ressonância nominal calculada e metade acima. Observe que a frequência de ressonância é dada pela equação 8.21 e a largura de banda pela equação 8.33.

Antes de começar a anotar os resultados, certifique-se também que as amplitudes de voltagens no resistor ( $V_{OR}$ ) no primeiro e no último valor escolhido para  $f$  sejam muito menores do que na ressonância. Faça medidas num intervalo de frequências suficientemente amplo para mostrar nitidamente o máximo da curva de  $\langle P_R \rangle$  vs.  $f$  (por exemplo, entre 1 kHz e 20 kHz).

5. Calcule os valores de  $\langle P_R \rangle$  pela equação 8.25 e coloque-os na tabela 1.
6. Calcule os valores teóricos para a potência média  $\langle P_R \rangle$  empregando a equação 8.27 para os três pontos indicados na tabela. Utilize para isto os valores medidos de  $f$  pelo osciloscópio, de  $C$  pelo multímetro e  $L$  indicado pelo fabricante.

Certifique-se que a amplitude do sinal do gerador permaneça constante ( $V_0 = 4V$ ) para todos os valores de frequência utilizados. A amplitude da voltagem do gerador deve ser monitorada pelo canal 1 do osciloscópio.

Todos os resultados experimentais devem ser apresentados com suas respectivas incertezas.

Tabela 1

$f$ (Hz)	$\log(f/\text{Hz})$	$V_{OR} \pm \sigma_{V_{OR}}$ (V)	$P_R \pm \sigma_{P_R}$ (mW) experimental	$P_R$ (mW) equação 8.27	Discrepância (%)
				-	-
				-	-
				-	-
				-	-
				-	-
				-	-
				-	-
				-	-

7. A partir dos dados da tabela 1 trace a curva da potência média (dados experimentais) dissipada no resistor em função do logaritmo da frequência  $f$ .
8. Determine a partir do gráfico traçado os seguintes parâmetros:
  - a frequência de ressonância,  $\omega_R$ ;
  - a largura de banda,  $\Delta\omega$ ;

- o fator de mérito,  $Q$ ;
  - a potência média no máximo,  $\langle P_R \rangle_{\max}$ .
9. Compare os resultados obtidos no item 8 com os valores nominais esperados, considerando-se os valores de  $R$ ,  $L$  e  $C$  usados. Escreva seus resultados na tabela 2.

Tabela 2

Parâmetro	Experimental	Modelo	Discrepância
$\omega_R$			
$\Delta\omega_{\text{série}}$			
$Q$			
$\langle P_R \rangle_{\max}$			

### 8.5.2 Procedimento II: análise da amplitude de corrente no circuito RLC em paralelo

1. Com o auxílio do osciloscópio, ajuste a tensão de saída do gerador para uma onda senoidal com amplitude  $V_0 = 4$  V e frequência  $f = 1$  kHz.
2. Monte o circuito da figura 8.6 com  $R = 2,2$  k $\Omega$ ,  $C = 10$  nF e  $L = 23,2$  mH. Meça e anote os valores de  $R$  e  $C$  utilizados.
3. Faça uma varredura rápida em frequência abrangendo a faixa entre 1 e 20 kHz, e pela observação da voltagem no resistor (canal 2 do osciloscópio) determine a frequência de ressonância para este circuito.
4. Faça um esboço da curva da voltagem no resistor ( $V_{0R}$ ) em função da frequência para este circuito. Para isto faça medidas rápidas de  $V_{0R}$  para alguns valores de frequência, tendo o cuidado de tomar pontos ao redor da ressonância medida no item anterior.

Certifique-se que a amplitude do sinal do gerador permanece constante ( $V_0 = 4$  V) para todos os valores de frequência utilizados. A amplitude da voltagem do gerador deve ser monitorada pelo canal 1 do osciloscópio.

### 8.5.3 Procedimento III: determinação da frequência de ressonância pela diferença de fase

Há várias maneiras de se determinar a frequência de ressonância de um circuito RLC. Nos procedimentos anteriores determinamos a frequência de ressonância através da dependência da amplitude da voltagem no resistor com a frequência. A introdução de indutores

e capacitores em circuitos elétricos alimentados com corrente alternada tem como resultado o surgimento de diferenças de fase entre a corrente e a voltagem aplicada no circuito. Vimos que no caso de um circuito capacitivo (RC), a corrente se adianta em relação à voltagem, enquanto que para um circuito indutivo (RL) ela se atrasa; já circuitos puramente resistivos não apresentam diferença de fase alguma. Quando o circuito RLC possui características capacitivas,  $X_C$  é maior que  $X_L$ , enquanto o contrário ocorre quando o circuito tem características indutivas. A ressonância ocorre quando  $X_C = X_L$ . Baseados nessas considerações, podemos conceber dois outros métodos para determinação da frequência de ressonância de um circuito RLC, que serão descritos a seguir.

### 8.5.3.1 Método da diferença de fase

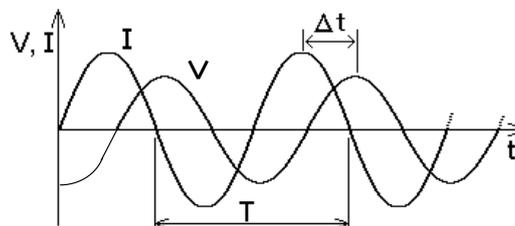


Figura 8.8: Diferença de fase entre a tensão do gerador e a corrente no circuito.

Neste método, montamos o circuito mostrado na figura 8.1 e variamos a frequência, observando os dois canais simultaneamente no osciloscópio (figura 8.8). Para frequências abaixo da frequência de ressonância a voltagem do resistor (canal 2) se encontra adiantada em relação à voltagem da fonte (canal 1). Para frequências acima da frequência de ressonância ocorre o contrário, a voltagem no resistor fica atrasada em relação à voltagem da fonte. A frequência de ressonância é aquela para a qual a diferença de fase é nula; nesse caso o circuito se comporta como puramente resistivo. Desse modo, variando-se a frequência podemos determinar com segurança a frequência na qual a diferença de fase vai a zero. Essa será a frequência de ressonância.

Observando os sinais senoidais de corrente e tensão através do gerador, a diferença de fase, em radianos, entre os dois sinais é dada por:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi\Delta t}{T} = 2\pi f\Delta t, \quad (8.46)$$

onde  $T$  e  $f$  são o período e a frequência do sinal do gerador, respectivamente, e  $\Delta t$  é o deslocamento relativo entre os sinais  $i(t)$  – proporcional a  $V_R(t)$  – e  $V(t)$ . Na figura,  $\Delta t$  é diferença de tempo entre dois máximos.

## 8.5.3.2 Método das figuras de Lissajous

Os osciloscópios digitais utilizados nesse curso possuem 2 canais, permitindo a observação simultânea de 2 sinais independentes. Mas além de permitir a observação de gráficos de voltagem versus tempo (configuração chamada de modo Y-T), o osciloscópio também pode mostrar em sua tela o gráfico da voltagem no canal 2 em função da voltagem do canal 1 (configuração conhecida como modo X-Y). Quando os sinais medidos pelo osciloscópio são senoidais, as figuras geométricas observadas na tela são o resultado da composição de 2 movimentos oscilatórios, um no eixo horizontal (canal 1) e outro no eixo vertical (canal 2): essas figuras são chamadas de figuras de Lissajous. Se esses sinais senoidais possuem a mesma frequência e uma diferença de fase não-nula, a figura observada será uma elipse, como pode ser visto na figura 8.9. E é possível determinar a diferença de fase entre esses sinais a partir da geometria da figura de Lissajous observada.

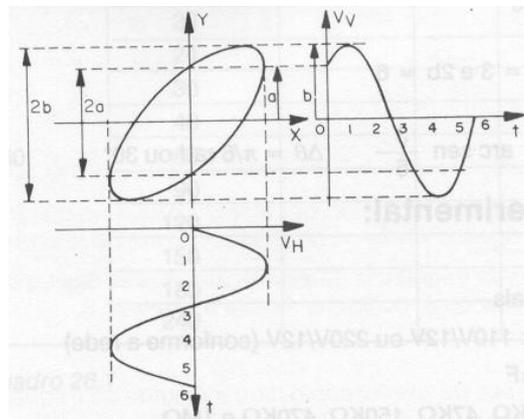


Figura 8.9: Figura de Lissajous (elipse) resultante da composição de 2 sinais senoidais defasados.

Para o caso do circuito RLC, aplicaremos a voltagem do gerador ao canal 1 (eixo  $x$ ) e a voltagem do resistor ao canal 2 (eixo  $y$ ). Sendo  $V_x$  a voltagem do gerador e  $V_y$  a voltagem no resistor, temos:

$$V_x = V_0 \text{sen}(\omega t), \quad (8.47)$$

e

$$V_y = V_0 \frac{R}{Z} \text{sen}(\omega t + \varphi). \quad (8.48)$$

Escrevendo  $V_y$  como função de  $V_x$  encontramos:

$$V_y = \frac{R}{Z} \left[ \cos(\varphi) V_x + \text{sen}(\varphi) \sqrt{V_0^2 - V_x^2} \right]. \quad (8.49)$$

Para  $\varphi = 0$ , a equação 8.50 se reduz à equação de uma reta, com uma inclinação dada por  $R/Z$ :

$$V_y = \frac{R}{Z} V_x. \quad (8.50)$$

Para  $\varphi = \pm \pi/2$ , a equação 8.49 se reduz à equação de uma elipse com os eixos maior e menor ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente:

$$\left(\frac{ZV_y}{RV_0}\right)^2 + \left(\frac{V_x}{V_0}\right)^2 = 1. \quad (8.51)$$

Para valores de  $\varphi$  diferentes de 0 ou  $\pm \pi/2$ , a elipse se torna excêntrica; sua excentricidade será máxima quando  $\varphi = 0$ , e a figura de Lissajous observada será uma reta. Nessa situação o sistema se encontra em ressonância. Na figura 8.10 mostramos a figura de Lissajous esperada para um circuito RLC para 2 situações diferentes: diferença de fase arbitrária e diferença de fase nula.

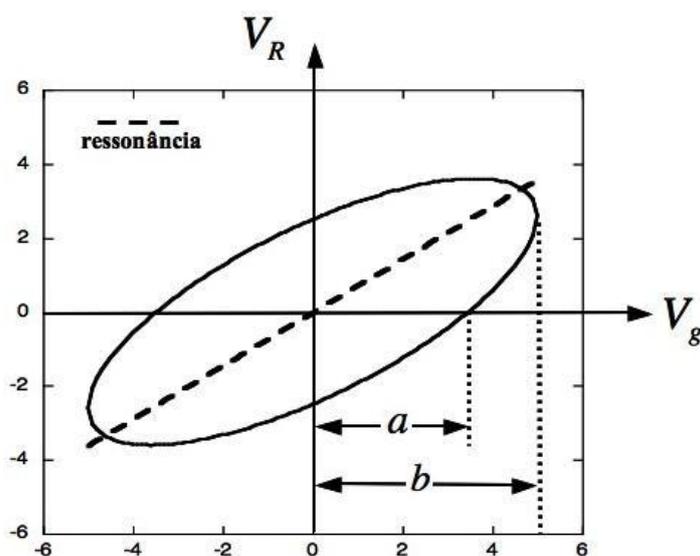


Figura 8.10: Circuito RLC com  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 10 \text{ nF}$  e amplitude de tensão do gerador  $V_0 = 5 \text{ V}$ . Linha contínua: figura de Lissajous para frequência diferente da frequência de ressonância. Linha tracejada: figura de Lissajous observada para frequência igual à frequência de ressonância.

Na figura 8.10 mostramos também 2 parâmetros ( $a$  e  $b$ ) que podem ser utilizados para medir a diferença de fase usando a figura de Lissajous. Usando a equação 8.49, observamos que quando  $V_x = V_0$  temos  $b = V_0$  e quando  $V_y = 0$  temos  $a = V_0 |\text{sen}(\varphi)|$ . Assim, podemos determinar o módulo da diferença de fase entre a voltagem do gerador e a corrente pela

expressão:

$$|\text{sen}(\varphi)| = \frac{a}{b}, \quad (8.52)$$

onde  $a$  e  $b$  são parâmetros representados na figura 8.10. Para a situação mostrada, temos  $|\text{sen}(\varphi)| = 3,5/5 = 0,7 \Rightarrow \varphi = 0,8 \text{ rad}$ .

### 8.5.3.3 Medidas da diferença de fase

1. Com o auxílio do osciloscópio, ajuste a tensão de saída do gerador para uma onda senoidal com amplitude  $V_0 = 4 \text{ V}$  e frequência  $f = 1 \text{ kHz}$ .
2. Monte o circuito da figura 8.1 com  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 10 \text{ nF}$  e  $L = 23,2 \text{ mH}$ . Meça os valores de  $R$  e  $C$  e anote o valor de  $L$  dos dispositivos utilizados, com suas incertezas (considere incerteza relativa de 10% para o valor nominal da indutância).
3. Utilizando o método da figura de Lissajous identifique a condição de ressonância do circuito. No modo de operação X-Y, varie a frequência até que a elipse na tela do osciloscópio se transforme numa reta. A partir dessa condição determine a frequência de ressonância  $f_R$  e sua respectiva incerteza. Compare o valor medido de  $f_R$  com o valor esperado, dado pela equação 8.21.
4. Ajuste a saída do gerador de funções para uma frequência  $f = 5 \text{ kHz}$  e meça os parâmetros  $a$  e  $b$  da figura de Lissajous formada (vide fig. 8.10). A partir destes valores determine a diferença de fase para esta frequência.
5. Complete a tabela 3 com os valores de diferença temporal ( $\Delta t$ ) entre a voltagem do gerador e a corrente do circuito para 10 valores de frequência, metade deles abaixo da frequência de ressonância determinada e a outra metade acima. Use para isto o valor da frequência de ressonância encontrado pela figura de Lissajous. A partir do valores medidos para  $\Delta t$ , calcule os valores da diferença de fase  $\varphi$ .

Certifique-se que a amplitude do sinal do gerador permanece constante ( $V_0 = 4 \text{ V}$ ) para todos os valores de frequência utilizados.

6. Na Tabela 3, calcule os valores esperados (nominais) para a diferença de fase ( $\varphi_N$ ), utilizando a equação 8.38 e os valores medidos para  $R$ ,  $L$  e  $C$ .

Lembre-se que no resistor a corrente está em fase com a voltagem e que para frequências abaixo da ressonância,  $0 < \varphi < +\pi/2$  e para frequências acima da ressonância  $-\pi/2 < \varphi < 0$ . Todos os resultados experimentais devem ser apresentados com suas respectivas incertezas.

Tabela 3

$f$ (Hz)	$\log(f/\text{Hz})$	$\Delta t \pm \sigma_{\Delta t}$ (ms)	$\varphi \pm \sigma_{\varphi}$ (rad)	$\varphi_N$ (rad)

7) Faça o gráfico da diferença de fase  $\varphi$  versus  $\log(f/\text{Hz})$ . Obtenha do gráfico traçado a frequência de ressonância  $f_R$ .